Mereologia w praktyce

Młody Alfred Tarski w 1929 roku – zapewne zafascynowany mereologią – przedstawił mereologiczną formalizację zwykłej euklidesowej geometrii. Mianowicie (napiszę to w dzisiejszej terminologii) podał sposób, jak można opisać geometrię euklidesowej płaszczyzny posługując się jedynie pojęciem kuli i relacji zawierania. Nazwał tę propozycję geometrią naturalną.

Jak na dwudziestoczterolatka przystało, zrobił to do tego stopnia krańcowo, by nie pojawiało się w tej formalizacji pojęcie punktu – kule były otwarte, a punkty to były pewne nieskończone malejące ciągi zawierających się kul. Do tego, oczywiście, przydałaby się aksjomatyka, ale nic rozsądnego w tej sprawie nie dało się zrobić. Udowodnił jedynie, że może ona istnieć.

Dobre wyobrażenie o tej propozycji (której przedstawienie tutaj byłoby zbyt obszerne) daje jej drobna przeróbka opublikowana w 1949 roku przez Stanisława Jaśkowskiego. Różnica polega jedynie na tym, że tu kule są domknięte, co pozwala łatwo zdefinionać punkty. Oto ta propozycja.

Kule oznaczane będą literami gotyckimi.

Punkty zdefiniować bardzo łatwo – te najmniejsze kule:

$$\mathbb{S} := \{\mathfrak{a} : \forall \mathfrak{b}\ (\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{a})\}.$$

Dalej punkty w tym systemie będę oznaczał dużymi literami łacińskimi.

Definiujemy kolejno styczność kul

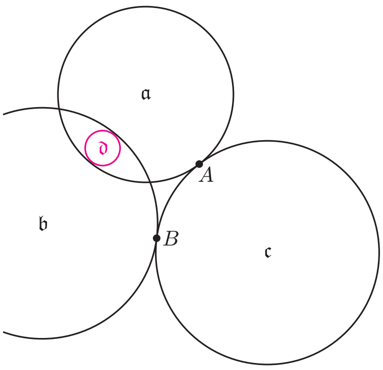
$$\mathfrak{a} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{b} \iff \exists!\, \mathfrak{c}\, (\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

fakt, że punkt leży na powierzchni kuli

$$A \overset{\bullet}{\bigcirc} \mathfrak{a} \iff A \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{a} \wedge \exists \mathfrak{b}(A \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{b} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \neq A)$$

(a więc jest punktem styczności dwóch kul),
wskazujemy kulę o danej średnicy

$$A \mathrel{\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet} B = \mathfrak{c} \iff A, B \overset{\bullet}{\bigcirc} \mathfrak{c} \wedge \neg\, (\exists\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\, (A \subset \mathfrak{a} \wedge B \subset \mathfrak{b} \wedge A \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{c} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{d} \subset \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{d} \subset \mathfrak{b}))$$



(to, czego zabrania zanegowany nawias jest przedstawione na rysunku),
a stąd już blisko do definicji kąta prostego

$$\lrcorner(ABC) \iff B \overset{\bullet}{\bigcirc} (A \mathrel{\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet} C),$$

jako kąta wpisanego opartego na średnicy.

Ale i ten pomysł, mimo oczywistej prostoty i naturalności rozsądną aksjomatyką nie zaowocował.

Naszkicujmy jednak, dlaczego za pomocą takiej formalizacji można geometrię w pełni opisać.

Każdy się zgodzi, że wyrażenie $\exists D : \lrcorner(ABD) \wedge \lrcorner(CBD) \wedge \lrcorner(ADC)$ opisuje fakt, że B jest punktem odcinka AC (proszę narysować). Stąd mamy współliniowość, proste i proste równoległe (mające wspólną prostopadłą). To zaś prowadzi do definicji przystawania odcinków. Jeśli bowiem są one równoległe, to sprawdzamy, czy tworzą równoległobok. Jeśli zaś nie – prowadzimy w ich końcach proste prostopadłe do nich (proszę narysować) – te cztery proste przecinając się tworzą równoległobok: jeśli jego przekątne są prostopadłe, to odcinki są przystające (prawda?).

Dysponując prostymi, odcinkami i ich przystawaniem możemy już opisać bez trudu geometrię. Wątpiących odsyłam do eleganckiej (choć już nie mereologicznej) pracy Tarskiego *What is elementary Geometry?*.

M.K.