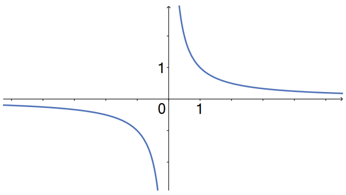
Asymptoty wielomianowe

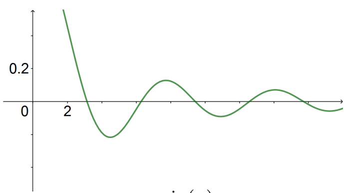
Jakub KABAT, Łukasz MERTA**, Kraków*

Niejeden z nas, cofając się pamięcią do czasów dzieciństwa, mógłby przytoczyć sytuację ze swojego życia, w której był o przysłowiowy „włos” od osiągnięcia zamierzonego celu. Mógł to być, na przykład, brakujący grosz, przez który kasjerka osiedlowego sklepu nie mogła precyzyjnie rozliczyć się z rachunku, autobus, który odjechał dosłownie tuż przed momentem, gdy przybyliśmy na przystanek albo czwarte miejsce w zawodach sportowych, przez które ominęło nas zaszczytne miejsce na podium. Wymieniając kolejne tego typu sytuacje, moglibyśmy (podobnie jak grupka dzieci, dyskutująca między sobą, które z nich ma ciekawsze hobby) rozpocząć coś na kształt licytacji, w której prześcigamy się w tym, kto był bliżej osiągnięcia swojego celu. Ze względu na różnorodność problemów i subiektywną naturę kryterium ich oceny stworzenie modelu sprawiedliwej oceny porównywanych uczestników licytacji mogłoby być nieco kłopotliwe. Celem przeprowadzonych dalej rozważań nie jest jednak zamiar stworzenia modelu oceny uczestników takiej licytacji, lecz próba budowy intuicji, która pomoże nam lepiej zrozumieć istotę obiektów, na których skupimy naszą uwagę.



Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Przedmiotem naszego zainteresowania będą asymptoty funkcji, które bywają przez nauczycieli nieformalnie (oczywiście w dobrej wierze!) przedstawiane jako proste, do których wykres funkcji się zbliża, ale nigdy ich „nie dotyka”. Standardowym przykładem funkcji prezentującej opisaną intuicję jest znana wszystkim funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$, której wykresem jest hiperbola. Przybliża się ona do prostej $y = 0$, która jest asymptotą funkcji f. Nie jest to jednak precyzyjny opis tego pojęcia, o czym świadczy przykład funkcji $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Uwidacznia on bowiem, że rozważana funkcja oraz jej asymptota mogą mieć punkty wspólne (w tym przypadku – nawet nieskończenie wiele!). Do dalszej części rozważań będzie nam zatem potrzebna formalna definicja tego typu obiektów.



Funkcja $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ przecina prostą poziomą $y = 0$ w punktach $(k\pi, 0)$ dla $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Powszechnie przyjęta nomenklatura określa podział na asymptoty pionowe oraz ukośne (rozróżnia się również asymptoty poziome, które są szczególnym przypadkiem asymptot ukośnych). Obserwacje, którymi chcielibyśmy podzielić się z Czytelnikiem, związane są jednak jedynie z pojęciem asymptoty ukośnej. Formalna definicja tego obiektu opiera się o pojęcie granicy funkcji.

Definicja. Mówimy, że prosta $y = ax + b$, $a \neq 0$ jest jednostronną (obustronną) *asymptotą ukośną* funkcji f, jeśli zachodzi jedna (zachodzą obie) z następujących równości:

$$(1) \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

Zacytowana powyżej definicja jest precyzyjna, ale podana w duchu teoretycznym. W praktyce, jeśli pewna prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną danej funkcji f, to współczynniki a i b możemy wyznaczyć, korzystając ze znanych powszechnie wzorów:

$$(2) \qquad a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - ax\big).$$

Istotnie, jeśli $f(x) = y = ax + b$, to zachodzą następujące równości:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(a + \frac{b}{x}\right) = a + 0 = a,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} b = b.$$

Wskazaliśmy zatem metodę prostego uzyskania wzoru asymptoty. Spróbujmy teraz zrozumieć, dlaczego wyznaczone z powyższych wzorów liczby a, b wyznaczają odpowiednią prostą. Zwróćmy uwagę, że zawarte we wspomnianych wzorach warunki spełnia również sama asymptota (patrz margines), czyli ze względu na podobne zachowanie funkcji i jej asymptoty wskazane wzory faktycznie mają sens. Z drugiej strony, obserwując wzory (2), możemy zauważyć, że wyznaczając współczynnik a jako pierwszy, niejako zaniedbujemy współczynnik b, natomiast obliczając współczynnik b, korzysta się z obliczonej już wartości współczynnika a. Można zatem powiedzieć, że w pierwszej kolejności interesuje nas kierunek odpowiedniej prostej, a dopiero w drugiej kolejności jej wysokość, poprzez którą rozumiemy wyraz wolny b. Spróbujemy teraz przekonać Czytelnika, że nie jest to pusta obserwacja.

Próbę szerszego spojrzenia na problem rozpoczniemy od zadania pytania – czy istnieje taka funkcja, dla której obiektem przybliżającym będzie inny obiekt niż prosta – np. parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, którą nazwalibyśmy wówczas asymptotą paraboliczną? Czy będziemy w stanie wówczas podać efektywne wzory na obliczanie wartości współczynników a, b i c, korzystając z opisanej powyżej intuicji?

Wzory, które zaproponujemy, stanowią próbę uogólnienia przedstawionej obserwacji. Zaczniemy od wyznaczenia współczynnika a, zaniedbując współczynniki b i c. Następnie wyznaczymy współczynnik b, korzystając z a, ale zaniedbując c. Na deser wyznaczymy współczynnik c, bez zaniedbywania pozostałych współczynników. Pamiętając o tym, że rozważana funkcja ma się zbliżać do paraboli przy argumentach zmierzających do nieskończoności, ostatecznie otrzymujemy następującą postać wzorów:

$$(3) \quad a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}, \quad c = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax^2 - bx\big)$$

i analogicznie dla $x \to -\infty$.

Na marginesie możemy zobaczyć przykład zastosowania zaproponowanych wzorów wraz z rezultatem wizualnym. Dowód ich prawdziwości przedstawimy natomiast w wersji ogólniejszej. Zaczniemy od wprowadzenia pojęcia *asymptoty wielomianowej*, a następnie opiszemy sposób jej wyznaczenia.

Definicja. Mówimy, że wielomian $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jest jednostronną (obustronną) *asymptotą wielomianową stopnia* n funkcji f, jeśli $a_n \neq 0$ oraz zachodzi jedna (zachodzą obie) z poniższych równości:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0.$$

Zanim sformułujemy i udowodnimy twierdzenie dotyczące postaci asymptot wielomianowych, udowodnimy następujący lemat.

Lemat. Jeśli $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jest asymptotą wielomianową stopnia n funkcji f, to zachodzi równość

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_n.$$

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, zachodzi równość

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^k} = 0,$$

gdyż mianownik dąży do nieskończoności. Stąd otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n.$$

Z założenia wiemy, że $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$, a zatem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy więc, że

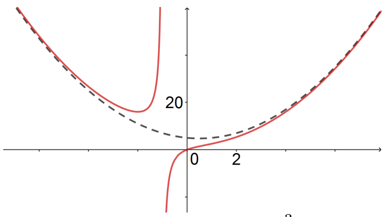
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - g(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} + \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^n} = 0 + a_n = a_n,$$

a to należało wykazać. □

Przykład 1.
Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x^3+4x}{x+1}$. Obliczamy dla tej funkcji wartości współczynników a, b i c:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x}{x^3+x^2} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x^2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 4x - x^2(x+1)}{x^2 + x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + 4x}{x^2 + x} = -1,$$
$$c = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x^2 + x\big) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 4x - (x^2 - x)(x+1)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x+1} = 5$$

i podobnie dla $x \to -\infty$. Otrzymujemy zatem asymptotę paraboliczną $y = x^2 - x + 5$. Na wykresie wygląda to następująco:



Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3+4x}{x+1}$ wraz z asymptotą.

Ciekawostka?
Równanie asymptoty można również otrzymać, dzieląc wielomian $x^3 + 4x$ z resztą przez $x + 1$. Wówczas wynik dzielenia to dokładnie szukana asymptota:

$$x^3 + 4x = (x^2 - x + 5)(x+1) - 5.$$

Okazuje się, że jest to (w przypadku funkcji wymiernych) prawidłowość, co opiszemy dalej.

Przykład 2.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. Ponieważ zachodzi równość $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$, można przypuszczać, że asymptotą wielomianową funkcji f będzie parabola $y = x^2$. Okazuje się jednak, że w tym przypadku intuicja zawodzi – stosując wzory (3), otrzymujemy asymptotę o równaniu

$$y = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} = (x + \frac{1}{4})^2 + \frac{5}{48},$$

czyli tę samą parabolę trzeba trochę przesunąć.
Obliczenia pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 1. Jeśli $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ jest asymptotą wielomianową stopnia n funkcji f, to zachodzą równości

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n},\\
a_{n-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}},\\
a_{n-2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1}}{x^{n-2}},\\
&\vdots\\
a_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - a_n x^n - \cdots - a_2 x^2}{x},\\
a_0 &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - a_n x^n - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x\right).
\end{aligned}$$

Dowód. Prawdziwość pierwszego wzoru wynika z lematu. Ustalmy teraz $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Aby udowodnić wzór pozwalający obliczyć a_k, rozważmy funkcję

$$f_k(x) = f(x) - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_{k+1}x^{k+1} \tag{4}$$

oraz wielomian

$$g_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Łatwo stwierdzić, że zachodzi równość $f(x) - g(x) = f_k(x) - g_k(x)$, tak więc możemy zastosować lemat do f_k i g_k. Otrzymujemy zatem, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_k(x)}{x^k} = a_k,$$

a po wstawieniu w powyższej równości wzoru (4) dostajemy wzór z tezy. □

Powyższe twierdzenie stanowi narzędzie do wyznaczania współczynników asymptoty wielomianowej, o ile wiemy, że ona istnieje. Oczywiście, nie tylko wielomiany mają asymptoty wielomianowe – pokazaliśmy taką funkcję w przykładzie 2. W szczególności asymptoty wielomianowe mają wszystkie funkcje wymierne.

Twierdzenie 2. Niech W, V, R i P będą wielomianami zmiennej x. Jeśli

$$\frac{W(x)}{V(x)} = \frac{R(x)}{V(x)} + P(x),$$

gdzie $\deg R < \deg V$ i $\deg P = \deg W - \deg V$, to P jest asymptotą wielomianową funkcji wymiernej h danej wzorem $h(x) = \frac{W(x)}{V(x)}$.

Zakończenie naszych rozważań chcielibyśmy uwieńczyć pewną obserwacją. Zwróćmy uwagę, jak zakończona powodzeniem próba zrozumienia natury pewnego obiektu może prowadzić do powstania pomysłów na jego ogólniejszą wersję. Mamy nadzieję, że nasza, bardziej wizualna niż naukowa, „próbka jednej z metod badawczych” zachęci Czytelnika do podjęcia podobnych działań i doprowadzi go do interesujących wyników.

Zadania dla Czytelnika:

1. Wykazać, że przy zaproponowanych wzorach (3) asymptotą paraboliczną paraboli jest ta sama parabola.

2. Wykazać, że dla danych wielomianów jednej zmiennej f oraz g, jeśli f jest asymptotą wielomianową g, to $f = g$.

3. Czy pewna funkcja może mieć dwie asymptoty wielomianowe różnych stopni?

4. Udowodnić twierdzenie 2.

5. Korzystając z rozwinięcia funkcji w szereg, wykazać, że $f(x) = e^x$ nie ma asymptoty wielomianowej. Czy wykres tej funkcji może w nieskończoności zbliżać się do wykresu funkcji wymiernej?

6. Jakie jest matematyczne wyjaśnienie różnicy między spodziewaną a otrzymaną asymptotą wielomianową w przykładzie 2?

*Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, jakkab2@gmail.com

**Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, lukasz.merta.26@gmail.com